Jacobi形式,Oda lifting,Maass spaceについて(保型形式とその周辺)

菅野, 孝史

数理解析研究所講究録
617巻 1987年 114-129

Jacobi形式, Oda lifting, Maass spaceについて

東大・教養（学振・研究員）
菅野孝史（Takashi Sugano）

このノートの目的は、符号（2, m+2）の直交群上の正則尖点形式の空間への1変数保型形式からの持ち上げ（Oda lifting）を、Jacobi形式の言葉で言い換えることにある。このことから、Maass spaceとlifting imageが一致することがわかる。更に持ち上げに伴うL関数の関係を求める。最後に、imageをL関数の言葉で特徴付けるための1ステップに、ふれたい。

§1. Jacobi形式のL関数

Jacobi形式とは、Siegel保型形式の様々な部分Fourier係数と同じ変換公式を満す保型形式のことである。ここでは、新谷先生により[14]で導入された用語、Hecke環・L関数の定義を用いて、一番易しい場合（本質的には1変数の保型形式の場合）に、L関数の解析接続・関数等式を調べる［一般的

な場合については Murase [09], [10] を参照されたい]。なお、この節の内容は、昨年度のシンポジウム報告集に書いた[16] §7 と殆んど重複しているが、記号の導入を兼ねて再記させてもらう。

1-1 Jacobi形式の定義: mを非負整数、$V_0=\mathbb{Q}^m$, $L_0=\mathbb{Z}^m$ とする。$\mathbb{Q}$上の代数群 H を、

$$H=H_{1,m}=\{(u,v,z)\mid u,v\in V_0,\ z={}^tz\in M_m(\mathbb{Q})\}$$
$$(u,v,z)(u',v',z')=(u+u',v+v',z+z'+u{}^tv'+v'{}^tu)$$

によって定義する。これには SL_2 が、

$$g^{-1}(u,v,z)g=(u',v',z'),\quad (u',v')=(u,v)g,\ z'=z-v{}^tu+v'{}^tu',$$

と作用している。この作用による H と SL_2 の半直積を、$\underline{G}=\underline{G}_{1,m}=H_{1,m}\cdot SL_2$ であらわす。これは、Sp_{m+1} の部分群とみなせる。なお、$\underline{G}$ の中心 Z は、H の中心と一致し、$\{(0,0,z)\mid z={}^tz\}$ である。

さて $\underline{G}_\infty$ は、$\underline{\mathfrak{D}}=\underline{\mathfrak{D}}_{1,m}=\{Z=(z,w)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ に、

$$(u,v,z)g\langle(z,w)\rangle=(g\langle z\rangle,\ w\,j(g,z)^{-1}+u\,g\langle z\rangle+v)$$

と作用している(ここで $g\langle z\rangle$, $j(g,z)$ は $SL_2(\mathbb{R})$ の上半平面への通常の作用及び保型因子)。m次正定値半整数対称行列 S と、自然数 k に対し、

$$J_{S,k}(\underline{g},Z)=j(g,z)^k\,e\Big[-\mathrm{tr}Sz+\frac{c}{j(g,z)}S[w]-\frac{2}{j(g,z)}S(u,w)-g\langle z\rangle S[u]\Big]$$
$$\Big(\underline{g}=(u,v,z)g,\ g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Big)$$

は、$\underline{\underline{G}}_\infty \times \underline{\underline{\mathfrak{D}}}$ 上の正則保型因子を与える。$\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{G}}(\mathbb{Z})$ とし、$\underline{\underline{\Gamma}}$ に関する weight k, index S の Jacobi (cusp) forms の空間 $\mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\underline{\Gamma}})$ を、

$$\mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\underline{\Gamma}}) \underset{def}{=} \left\{ f : \underline{\underline{\mathfrak{D}}} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(\gamma\langle Z\rangle) = J_{S,k}(\underline{\underline{\gamma}}, Z) f(Z) \quad \forall \underline{\underline{\gamma}} \in \underline{\underline{\Gamma}} \\ \text{holomorphic, cuspidal} \end{array} \right\}$$

と定義する。各元は、

$$f(z,w) = \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z},\ \alpha\in L_0^* = (2S)^{-1}L_0 \\ a - S[\alpha] > 0}} a_f(a,\alpha)\, \mathbf{e}[az + 2S(\alpha, w)]$$

と Fourier 展開されることに注意しておく。

$\mu \in L_0^*/L_0$ に対し、

$$\theta_\mu(z,w) = \sum_{\eta\in L_0} \mathbf{e}[zS[\eta+\mu] + 2S(\eta+\mu, w)]$$

とおく。$\mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\underline{\Gamma}})$ を、$\{\theta_\mu(z,w) \mid \mu \in L_0^*/L_0\}$ を basis にして展開することによって、weight $k - \frac{m}{2}$ のベクトル値尖点形式が得られる。すなわち、

$$\mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\underline{\Gamma}}) \cong S_{k-\frac{m}{2}}(SL_2(\mathbb{Z}); U_S),$$

ここで右辺の U_S はテータの変換公式からきまる $|L_0^*/L_0|$ 次のユニタリ行列。

<u>1-2</u> Hecke 環：p を素数とし、$\underline{\underline{G}}_p = \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}_p}$, $\underline{\underline{K}}_p = \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$, $Z_p = Z_{\mathbb{Q}_p}$ とおく。$\chi = \prod_v \chi_v$ を $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$ の指標で $\chi_\infty(x) = \mathbf{e}[x]$ となるものとする。新谷先生により $\underline{\underline{G}}_p$ の Hecke 環が、

$$\underline{\underline{\mathcal{H}}}_{S,p} = \left\{ \phi : \underline{\underline{G}}_p \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{bi } \underline{\underline{K}}_p\text{-invariant} \\ \phi((0,0,z)g) = \chi_p(\mathrm{tr}\, Sz)\phi(g) \quad \forall z \in Z_p \\ Z_p \backslash \mathrm{supp}\,\phi = \text{compact} \end{array} \right\}$$

と定義されている（積は、$Z_p \backslash \mathfrak{G}_p$ 上の convolution ）。

以下、“$L_{0,p} = L_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ が S に関し maximal integral lattice for $\forall p$” を仮定する。

$$L'_{0,p} = \{ x \in L^*_{0,p} \mid S[x] \in p^{-1}\mathbb{Z}_p \}$$

は，$L_{0,p}$ を含み、$L'_{0,p}/L_{0,p}$ は、有限体 $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ 上の vector space となるから、その次元を ∂_p であらわす（殆んどの p では、$\partial_p = 0$ である）。ν_p を S の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index，$n_{0,p} = m - 2\nu_p$ とし、$\underline{\underline{\mathcal{H}}}_{S,p}$ の特別な元 $\phi_{0,p}$，$\phi_{1,p}$ を

$$\begin{cases} \phi_{0,p} : (0, y, 0)\ (y \in L'_{0,p}) \text{ での値} = p^{-\partial_p}, & \mathrm{supp} = Z_p \underline{\underline{K}}_p \{(0,y,0) \mid y \in L'_{0,p}\} \underline{\underline{K}}_p \\ \phi_{1,p} : \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \text{ での値} = 1, & \mathrm{supp} = Z_p \underline{\underline{K}}_p \begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1} \end{pmatrix} \underline{\underline{K}}_p \end{cases}$$

と定義する。容易に、

$$\phi_{0,p} * \phi_{1,p} = \phi_{1,p} * \phi_{0,p} = \phi_{1,p},$$

$$\phi_{0,p} = 1 \quad \text{if } \partial_p = 0, \qquad \phi_{0,p}^2 = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial_p = 1 \\ (1-p^{-1})\phi_{0,p} + p^{-1} & \text{if } \partial_p = 2. \end{cases}$$

この２元で生成される $\underline{\underline{\mathcal{H}}}_{S,p}$ の subalgebra を、$\underline{\underline{\mathcal{H}}}'_{S,p}$ とおく。

$\lambda_p \in \mathrm{Hom}(\underline{\underline{\mathcal{H}}}'_{S,p}, \mathbb{C})$ の L 関数を、

$$L_p(\lambda_p; s) = \left\{ 1 - \left(\lambda_p(\phi_{1,p}) p^{-(1+\frac{m}{2})} - p^{-n_{0,p}/2 + \partial_p} + p^{-1+n_{0,p}/2}\right) p^{-s} + \lambda_p(\phi_{0,p})^{-1} p^{-2s} \right\}^{-1}$$

$$\times \begin{cases} (1 - \chi_S(p) p^{-s})^{-1} & \text{if } m = \text{偶} \\ 1 & \text{if } m = \text{奇} \end{cases}$$

$$\times \begin{cases} 1 & (n_{0,p}, \partial_p) = (2,1) \text{ or } \partial_p = 0 \\ 1 + p^{1/2 - s} & (n_{0,p}, \partial_p) = (1,1) \\ 1 - p^{1/2 - s} & = (3,1) \\ (1 + p^{1/2-s})(1 - p^{1/2-s}) & = (3,2) \\ (1 + p^{1-s})(1 + p^{-s}) & = (2,2) \\ (1 - p^{1-s})(1 - p^{-s}) & = (4,2) \end{cases}$$

と定義する。ここで χ_S は、$\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{m/2}\det S})/\mathbb{Q}$ に対応する Dirichlet 指標。

1-3 L関数：$\mathfrak{S}_{S,k}(\Gamma)$ の元を、$\mathfrak{G}_A$ 上の関数とみる。convolution で、$\otimes_{p<\infty}\mathcal{H}'_{S,p}$ が（Petersson 内積に関し）正規可換に作用している。今、同時固有関数 $f\in\mathfrak{S}_{S,k}(\Gamma)$：$f*\phi=\lambda_f(\phi)f \quad \forall\phi\in\otimes_p\mathcal{H}'_{S,p}$ に対し、

$$\xi(f;s)=\prod_p L_p(\lambda_f;s)\times\Gamma\left(s+k-\tfrac{m+2}{2}\right)\times\begin{cases}2^{-s}\pi^{-\frac{3}{2}s}(\det 2S)^{s} & m=\text{偶}\\(2\pi)^{-s}(2^{-1}\det 2S)^{s} & m=\text{奇}\end{cases}$$

$$\times\begin{cases}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) & \text{if } m\equiv 0\ (4)\\\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) & \text{if } m\equiv 2\ (4)\\1 & \text{if } m=\text{奇}\end{cases}$$

とおく。

このL関数に対し、次の定理が成立する。

Theorem 1　$k>\frac{m+1}{2}$ とする。$\xi(f;s)$ は全 s 平面に解析接続され関数等式

$$\xi(f;s)=\begin{Bmatrix}-1 & \text{if } m\equiv 1 \text{ or } 3\ (8)\\ 1 & \text{otherwise}\end{Bmatrix}\xi(f;1-s)$$

をみたす。更に、$m\not\equiv 6\ (8)$ ならば $\xi(f;s)$ は entire であり、$m\equiv 6\ (8)$ のときは $s=0,1$ で possible simple pole を持つのみである。

§2. Oda lifting と Maass space

この節では、Oda [11] で構成されている elliptic modular から直交群上の保型形式への lifting を、前節の Jacobi 形式

の言葉を使って言い換える。こうするメリットのひとつは、original version では一般には成立しない、*lifting* の単射性が成立することにある。また、Fourier係数をみると、2次 Siegel の場合の Maass space と同様、部分Fourier 係数からの持ち上げとなっていることがわかる。

2-1 Oda *lifting* : L_0, V_0, S 等は前節の通りとし、

$$L_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ L_0 \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subset V_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ V_0 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -2S & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ L_1 \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subset V = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ V_1 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & Q_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

とおく。

G を Q の直交群 $O(Q)$, $\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C}^{m+2} \mid Q_1[\operatorname{Im} z] > 0 \}$ とする。$\mathcal{D}$ は2個の連結成分を持つが、$z_0 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ を含む方を $\mathcal{D}^+$ と書く。G_∞ は $\mathcal{D}$ に、

$$g \cdot \hat{z} = \widehat{g\langle z\rangle} \cdot J(g, z) \quad \left(\hat{z} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Q_1[z] \\ z \\ 1 \end{pmatrix},\ J(g,z) \in \mathbb{C}^\times \right)$$

と作用し、$J(g, z)$ は $G_\infty \times \mathcal{D}$ 上のひとつの正則保型因子。

$$\Gamma = G \cap GL(m+4, \mathbb{Z}) \supset \Gamma^* = \{ \gamma \in \Gamma \mid (\gamma - 1) L^* \subset L \}$$

とおき、$S_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma^*)$ でそれぞれ Γ, Γ^* に関する weight k の正則尖点形式の空間をあらわす。各 $F \in S_k(\Gamma^*)$ は、$F(z) = \sum_{\nu \in L_1^*} a_F(\nu)\, \mathbf{e}[Q_1(\nu, z)]$ と各連結成分上 Fourier展開される。

上半平面の点 $\tau = x + iy$ に対し

$$Q_\tau = xQ + iyR, \qquad R = \begin{pmatrix} 1_2 & & \\ & 2S & \\ & & 1_2 \end{pmatrix}$$ とおき、

V_∞ 上の急減少関数 f_z を．

$$f_z(v) = Q(\hat{\mathfrak{z}}_0, v)^k \, \mathbf{e}[Q_z[v]] \quad で定める．$$

最後に，*lifting* を定義するテータ関数を、

$$\theta((z,w),g) = \sum_{\mu \in L^*/L} \theta(z,g;\mu)\, \theta_{\pi(\mu)}(z,w) \quad とおく．$$

ここで $(z,w) \in \mathfrak{D}_{1,m}$，$g \in G_\infty$ で，

$$\theta(z,g;\mu) = y^{\frac{m+2}{2}} \sum_{\mathfrak{z} \in L} f_z(g^{-1}(\mathfrak{z}+\mu)) ,$$

π は．V の元の V_0‐成分を対応させる mapping．

Oda [11] の主結果は．次のように言い直される．

<u>Theorem (Oda)</u>　$k > 2m+4$ とする．

(i) $f \in \mathfrak{S}_{S,k}(\Gamma)$ のとき，

$$\iota f(g) \underset{\text{定}}{=} \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{D}} \overline{\theta(z,g)}\, f(z)\, y^{k-2} dx\,dy\,du\,dv \qquad (z = (x+iy,\ u(x+iy)+v))$$

$\in S_k(\Gamma^*)$．

逆に，$F \in S_k(\Gamma^*)$ のとき，

$$\rho F(z) \underset{\text{定}}{=} \int_{\Gamma^*\backslash G_\infty} \theta(z,g)\, F(g)\, dg \quad \in \mathfrak{S}_{S,k}(\Gamma).$$

(ii) $\rho F(z,w)$ は (up to non-zero constant で)

$$\sum_{\substack{\mathfrak{z} \in L^*/\Gamma^* \\ Q[\mathfrak{z}]>0}} \theta_{\pi(\mathfrak{z})}(z)\, \mathbf{e}[\tfrac{1}{2}Q[\mathfrak{z}]z] \int_{\Gamma^*_{\mathfrak{z}}\backslash X_{\mathfrak{z}}} F(x)\, Q(\tilde{x},\mathfrak{z})^{k-(m+2)} \omega(x)$$

と Fourier 展開される．ここで、$X_{\mathfrak{z}} = G_{\mathfrak{z}}/G_{\mathfrak{z}} \cap U_\infty \hookrightarrow \mathfrak{D}$，$\omega$ は $\mathfrak{D}$ 上の holomorphic $(m+2)$ form の $X_{\mathfrak{z}}$ への引き戻し，$U_\infty = \{g \in G_\infty \mid g\langle \mathfrak{z}_0 \rangle = \mathfrak{z}_0\}$．

(iii) $\iota f(\mathfrak{z})$ $(\mathfrak{z}\in\mathfrak{D}^+)$ は (up to non-zero constant で)

$$\sum_{\substack{\nu=\begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n\end{pmatrix}\in L_1^* \\ \sqrt{-1}\nu\in\mathfrak{D}^+}} \left\{ \sum_{\substack{r>0 \\ r^{-1}\nu\in L_1^*}} r^{k-1} a_f(mn/r^2, \alpha r^{-1}) \right\} e[Q_1(\nu,\mathfrak{z})]$$

と Fourier 展開される。

Remark • (i) の定義より、ρ と ι は、Petersson 内積に関し、互いに他の adjoint になっている。

• (iii) より特に、(original version とは異なり) ι は injective となっている。

• もうひとつの maximal parabolic subgroup による部分 Fourier 係数は、記号の違いを除き、$\mathfrak{S}_{s,k}(\Gamma)$ の元である。直接 (iii) が $S_k(\Gamma^*)$ に属することを示すこともできる。(cf. [08], [16])

2-2 Maass space : 2次 Siegel の場合にならい、

$S_k(\Gamma^*)$ の Maass space $S_k(\Gamma^*)^{(M)}$ を、

$$S_k(\Gamma^*)^{(M)} = \left\{ F\in S_k(\Gamma^*) \;\middle|\; a_F\begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n\end{pmatrix} = \sum_{\substack{r\in\mathbb{N} \\ r^{-1}m,\, r^{-1}n\in\mathbb{Z},\, \alpha r^{-1}\in L_0^*}} r^{k-1} a_F\begin{pmatrix} mn/r^2 \\ \alpha r^{-1} \\ 1\end{pmatrix} \right\}$$

で定義する (original case [08], SU(2,2) case [06] [03] [17])。

また、形式的にはこれより大きい空間 $S_k(\Gamma^*)^{(F)}$ を、

$$S_k(\Gamma^*)^{(F)} = \left\{ F\in S_k(\Gamma^*) \;\middle|\; a_F\left(l\cdot\begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n\end{pmatrix}\right) = a_F\left(l\cdot\begin{pmatrix} mn \\ \alpha \\ 1\end{pmatrix}\right) \quad \forall\begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n\end{pmatrix}:\text{primitive} \right\}$$

と定義。$S_k(\Gamma)^{(M)} = S_k(\Gamma^*)^{(M)} \cap S_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma)^{(F)} = S_k(\Gamma^*)^{(F)} \cap S_k(\Gamma)$.

<u>Proposition</u>　$k > 2m+4$ とする.

$$\begin{array}{ccc} S_k(\Gamma^*)^{(M)} & \overset{\cong}{\underset{\iota}{\longleftarrow}} & \mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\Gamma}) \\ \cup & & \cup \\ S_k(\Gamma)^{(M)} & \cong & \mathfrak{S}^{+}_{S,k}(\underline{\Gamma}) = \{ f \in \mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\Gamma}) \mid f * \phi_{0,p} = f \quad \forall p \} \end{array}$$

§3. 直交群のL関数

この節では、$S_k(\Gamma)$ のL関数を定義するとともに、Eisenstein級数を使った積分表示を与える。特に $S_k(\Gamma)^{(F)}$ の元に対しては、L関数の関数等式を求める。

3-1 *local* L関数の定義 :　$G_p = G_{\mathbb{Q}_p} \supset U_p = G_{\mathbb{Z}_p}$

G_p と U_p の組で決まるHecke環 $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}(G_p, U_p)$ について Satake同型 ([13]) が成立する.

$$\Phi : \mathcal{H}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[X_1^{\pm}, \cdots, X_{\nu_p+2}^{\pm}]^W$$

(ここで、ν_p は §1 で述べた S の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index, W は Weyl群.)

$\lambda_p \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_p, \mathbb{C})$ に対し、その *local* L関数を定義する.

$$L_p(\lambda_p; s) \underset{N}{=} \lambda_p\left(\Phi^{-1}\left(\prod_{j=1}^{\nu_p+2}(1-X_j p^{-s})(1-X_j^{-1}p^{-s})\right)\right)^{-1}$$

$$\times \begin{cases} 1 & \text{if } (n_{0,p}, \partial_p) = (0,0),\ (1,0) \\ (1-p^{-2s})^{-1} & = (2,0) \\ (1-p^{-s})^{-1} & = (2,1) \\ (1-p^{-s})^{-1}(1+p^{1-s}) & = (2,2) \\ (1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-1-s})^{-1} & = (4,2) \\ (1+p^{-\frac{1}{2}-s}) & = (1,1) \\ (1-p^{-\frac{1}{2}-s})^{-1} & = (3,1) \\ (1-p^{-\frac{1}{2}-s})^{-1}(1+p^{\frac{1}{2}-s}) & = (3,2) \end{cases}$$

ここで、$n_{o,p}$, ∂_p は§1 で定義したもの．

Remark　$\partial_p \neq 0$ なる有限個の p については，[15]で与えた定義と少し異なる場合がある（λ_p によらぬ違い）。

3-2　local Whittaker 関数：$\xi \in V_{1,p}$ に対し、

$$\mathcal{W}_\xi \underset{\text{def}}{=} \left\{ W : G_p \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} W(n(X)(1,h)gu) = \chi_p(Q_1(\xi, X))\,W(g) \\ \forall X \in V_{1,p},\ \forall g \in G_p,\ \forall u \in U_p,\ \forall h \in H(\xi)_p \cap U_p \end{array} \right\}$$

とおく．但し，$n(X) = \begin{pmatrix} 1 & -{}^tXQ_1 & -\frac{1}{2}Q_1[X] \\ 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$t \in \mathbb{Q}_p^\times$, $h \in O(Q_1)_p$ に対し，$(t,h) = \begin{pmatrix} t & & \\ & h & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix}$ とおいた．また，$H(\xi)$ は ξ を固定する $O(Q_1)$ の元全体。

$\xi = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \in L_{1,p}^*$，$Q_1[\xi] \neq 0$ とする。任意の $X \in V_{1,p}$ に対し、$(p^{-1},1)\,n(X)\,\xi \notin L_{1,p}^*$ のとき、ξ を（p で）reduced ということにする。以下これを仮定し，§2 で定義した $S_k(\Gamma)^{(M)}$，$S_k(\Gamma)^{(F)}$ の local version にあたるものを導入しておく。

$$\mathcal{W}_\xi^{(F)} \underset{\text{def}}{=} \{ W \in \mathcal{W}_\xi \mid W((1,h)g) = W(g) \quad \forall h \in H(\xi) \}$$

$$\mathcal{W}_\xi^{(M)} \underset{\text{def}}{=} \left\{ W \in \mathcal{W}_\xi^{(F)} \;\middle|\; \begin{array}{l} W((p^{n+l}, M_n)) - W((p^{n+l}, M_{n+1})) \\ = p^{-l}\, W((p^n, M_n)) \qquad \forall n, l \geq 0 \end{array} \right\}$$

但し　$M_n = \begin{pmatrix} p^{-n} & & \\ & 1 & \\ & & p^n \end{pmatrix}$

これらは全て $\mathcal{H}_p$-stable である。

Theorem 2　$W \in \mathcal{W}_\xi$，$\phi' * W * \phi = \lambda_p'(\phi')\lambda_p(\phi)\,W$ for $\forall \phi \in \mathcal{H}_p$, $\forall \phi' \in \mathcal{H}(H(\xi)_p, H(\xi)_p \cap U_p)$ とする。このとき、

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} W((t,1))\,|t|_p^{s-\frac{m+2}{2}}\,d^\times t$$
$$= L_p(\lambda_p;s)\cdot L_p(\lambda'_p;s+\tfrac{1}{2})^{-1}\times\begin{Bmatrix} 1 & m=\text{奇} \\ (1-p^{-2s})^{-1} & m=\text{偶}\end{Bmatrix}\times W(1)$$
.

3-3 $O(1,m+2)$ 上の Eisenstein 級数 : $\xi=\begin{pmatrix} a\\ \alpha\\ 1\end{pmatrix}\in L_1^*$, $Q_1[\xi]>0$ とする。ξ は全ての p で reduced としよう。

$$\underline{\underline{S}}=\begin{pmatrix} S & S\alpha \\ {}^t(S\alpha) & a\end{pmatrix},\quad Q'=\begin{pmatrix} & & 1\\ & -2\underline{\underline{S}} & \\ 1 & & \end{pmatrix}\quad \text{とおく。}$$

G' を Q' の直交群、P' を G' の上三角 parabolic subgroup とする。$H(\xi)$ を $O(\underline{\underline{S}})$ と同一視しておく。

$$f: H(\xi)_{\mathbb{Q}}\backslash H(\xi)_{A}/H(\xi)_{\infty}\prod_p(H(\xi)_p\cap U_p)\longrightarrow \mathbb{C}$$

が、$\bigotimes_p \mathcal{H}(H(\xi)_p, H(\xi)_p\cap U_p)$ の同時固有関数 : $f*\phi'=\lambda'(\phi')f$ だとしよう。Eisenstein 級数を、

$$E(g,s;f)\underset{\text{def}}{=}\sum_{\gamma\in P'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_{\mathbb{Q}}} f(\beta(\gamma g))\,|\alpha(\gamma g)|_A^{s+\frac{m+1}{2}}$$

で定義。

ここで、$G'_A\ni g$ を、$g=\begin{pmatrix}\alpha(g) & * & *\\ 0 & \beta(g) & *\\ 0 & 0 & \alpha(g)^{-1}\end{pmatrix}\prod_v u_v$ と岩沢分解した。

Eisenstein 級数の一般論より (cf. [02], [04], [05], [07]) $E(g,s;f)$ は全 s-平面に解析接続され、関数等式

$$E(g,s;f)=\frac{\xi(f;s)}{\xi(f;s+1)}\mu(s)\times\begin{Bmatrix} 1 & m+1=\text{偶}\\ \dfrac{\xi(2s)}{\xi(2s+1)} & m+1=\text{奇}\end{Bmatrix}$$
$$\times E(g,-s;f)$$

をみたす。

ここで，$\mu(s)$ は、$\mu(s)\mu(-s)=1$ をみたす（具体的にわかる）s の有理式であり、

$$\xi(f;s)=\prod_p L_p(\lambda_p';s)\times\begin{Bmatrix}(2\pi)^{-ns}(2^{-1}\det 2\underline{\underline{S}})^{s/2} & m=\text{奇}\\ (2\pi)^{-ns}(\det 2\underline{\underline{S}})^{s/2} & m=\text{偶}\end{Bmatrix}$$

$$n=\left[\frac{m+1}{2}\right]\qquad \times\begin{cases}\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(s-n+\frac{1}{2}+2j) & m=\text{奇}\\ \prod_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(s-n+1+2j)\prod_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(s+2j) & m=\text{偶},\ n=\text{偶}\\ \prod_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(s-n+1+2j)\prod_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\Gamma(s+2j+1) & m=\text{偶},\ n=\text{奇}\end{cases}$$

3-4 $S_k(\Gamma)$ の L 関数：$G_A=G_{\mathbb{Q}}G_\infty\prod_p U_p^*$ （$U_p^*=\{u\in U_p \mid (u-1)L^*\subset L\}$）が成立するから、$S_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma^*)$ とも G_A 上の関数とみなしてよい。今、$F\in S_k(\Gamma)$ が、$\otimes_p\mathcal{H}_p$ の同時固有関数としよう。F の L 関数を次のように定義する。$\nu=\left[\frac{m}{2}\right]$,

$$\xi(F;s)\underset{\text{def}}{=}(2\pi)^{-(\nu+2)s}\begin{Bmatrix}(2^{-1}\det 2S)^{s/2} & m=\text{奇}\\ (\det 2S)^{s/2} & m=\text{偶}\end{Bmatrix}$$

$$\times\Gamma(s+k-\tfrac{m}{2}-1)\Gamma(s+\tfrac{m}{2})\begin{Bmatrix}\prod_{j=0}^{\nu}\Gamma(s-\frac{1}{2}-\nu+2j) & m=\text{奇}\\ \prod_{j=1}^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(s-\nu+2j)\prod_{j=1}^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(s+2j-1) & m=\text{偶},\ \nu=\text{偶}\\ \prod_{j=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\Gamma(s-\nu+2j)\prod_{j=0}^{\frac{\nu-1}{2}}\Gamma(s+2j) & m=\text{偶},\ \nu=\text{奇}\end{Bmatrix}$$

$$\times\prod_p L_p(\lambda_F;s)$$

各 $\xi\in V_{1,\mathbb{Q}}$ に対し、

$$F_\xi(g)=\int_{V_{1,\mathbb{Q}}\backslash V_{1,A}}F(n(x)g)\,\chi(-Q_1(\xi,x))\,dx$$

とおく。今 ξ が全ての p で reduced だとし、f を前項のよう

にとる。さらに、

$$W_{F,\xi,f}(g)=\int_{H(\xi)_{\mathbb{Q}}\backslash H(\xi)_{\mathbb{A}}} F_\xi((1,h)g)\,f(h)\,dh$$ とおく。

<u>Theorem 3</u>　以上の状況で、次式が成立する。

$$\int_{G'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_{\mathbb{A}}} E^*(g', s-\tfrac{1}{2}; f)\, F(g'g_0)\, dg'$$

$$= c\cdot \lambda^*(s)^{-1}\, \xi(F;s)\, W_{F,\xi,f}(g_0)$$

ここで，c は non-zero constant，$g_0\in G^{\circ}_{\infty}$ は ξ に依存する元，$\lambda^*(s)$ は、具体的にわかる s の多項式，そして

$$E^*(g';s;f)=\xi(f;s+1)\begin{Bmatrix}\xi(2s+1) & m=\text{偶}\\ 1 & m=\text{奇}\end{Bmatrix}E(g',s;f).$$

<u>Remark</u>　E^* の解析的性質より，$W_{F,\xi,f}(g_0)\neq 0$ なる条件下で、$\xi(F;s)$ の解析接続が言えたことになる。しかし、関数等式については、$\xi(f;s)$ のそれが障害となり、一般には難しい。

<u>Corollary</u>　$F\in S_k(\Gamma)^{(F)}$ が Hecke eigen とする。このとき、$\xi(F;s)$ は全 s-平面に解析接続され、関数等式

$$\xi(F;s)=\begin{Bmatrix}-1 & \text{if } m\equiv 5,7\ (8)\\ 1 & \text{otherwise}\end{Bmatrix}\xi(F;1-s)$$

をみたす。possible pole は，$s=-\frac{m}{2}+j$ $(0\leq j\leq m+1)$ のみであり、そのうち最大のもの $\frac{m}{2}+1$ では高々 simple である。

§4. Maass space のL関数

この節では、§1でみたJacobi形式がHecke eigenのとき、Oda liftingで持ち上げたものが再びHecke eigenとなること及びその関係を求める。応用としてMaass spaceについて、前節Corollaryより詳しい情報が得られる。最後に、$S_k(\Gamma)^{(F)}$に於けるMaass spaceの特徴付けを行う。

Theorem 4　$k > 2m+4$ とする（$\nu = [\frac{m}{2}]$）。

$f \in \mathfrak{S}^{+}_{S,k}(\Gamma)$ が $\otimes_p \underline{\mathcal{H}}'_{S,p}$ - eigen ならば、ιf は $\otimes_p \mathcal{H}_p$ - eigen であり、次式が成立する。

$$\xi(\iota f; s) = c.\ \xi(f; s) \times \begin{cases} \prod_{j=0}^{\nu} \xi(s+\frac{1}{2}+j)\,\xi(s-\frac{1}{2}-j) \prod_{j=0}^{2\nu}(s-\frac{1}{2}-\nu+j) & m=奇 \\ \prod_{j=0}^{2\nu} \xi(s-\nu+j) \prod_{j=0}^{2\nu-1}(s-\nu+j) & m=偶. \end{cases}$$

（cf. $Sp(2,\mathbb{R})$ …[01], $SU(2,2)$ …[03]）

Corollary　上と同じ状況に於て、$\xi(\iota f; s)$ は、$m \not\equiv 6$ (8) ならば高々simple poleをもつのみであり、$m \equiv 6$ (8)の場合は、$s=0,1$ で高々2位である他ではsimple poleのみである。

さて、$E^*(g', s; 1)$ の $s = \frac{m+1}{2}$ での留数が定数となること及び、ι のadjoint map ρ の表示（Theorem Oda (iii)）を使えば、Oda [12] と平行な議論によって次の定理が証明される。

Theorem 5　$k > 2m+4$, $F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$ とする。

$F \in S_k(\Gamma)^{(M)} \iff \zeta(F;\lambda)$ が $\lambda = \frac{m+2}{2}$ で simple pole をもつ。

Remark　$Sp(2,\mathbb{R}) \sim SO(2,3)$ (cf. [12]), $SU(2,2) \sim SO(2,4)$ (cf. [16]) の場合の例から考えると、上の定理は $F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$ の仮定をなくしても成立することが期待される。

References

[01] A. N. Andrianov : Modular descent and Saito-Kurokawa conjecture , Inv. Math. 53 (1979), 267-280.

[02] J. Arthur : Eisenstein series and the trace formula , Proc. Symp. Pure Math. vol.33 (1979), part 1, 253-274.

[03] V. Gricenko : Maass space for SU(2,2), Hecke algebra and zeta function, in Russian, (preprint).

[04] Harish-chandra : Automorphic forms on semi-simple Lie groups , Lecture Note in Math. 62, Springer, 1968.

[05] V. L. Kalinin : Eisenstein series on the symplectic group, Math. USSR-Sb. 32 (1977), 449-476.

[06] H. Kojima : An arithmetic of hermitian modular forms of degree two , Invent. Math. 69 (1982), 217-227.

[07] R. P. Langlands : On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lecture Note in Math. 544, Springer,1976.

[08] H. Maass : Über eine Spizialschar von Modulformen zweiten Grades, I, II, III, Invent. Math. 52 (1979), 95-104, 53 (1979), 249-253, 53 (1979), 255-265.

[09] A. Murase : Jacobi forms に付随するL函数について, 数理解析研究所講究録 583.

[10] A. Murase : L-functions attached to Jacobi forms of degree n (preprint).

[11] T. Oda : On modualr forms associated with indefinite quadratic forms of signature (2,n-2) , Math. Ann. 231 (1977), 97-144.

[12] T. Oda : On the poles of Andrianov L-functions , Math. Ann. 256 (1981), 323-340.

[13] I. Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields , Inst.Hautes Études Sci. Publ. Math. 18 (1963).

[14] Shintani : unpublished notes.

[15] T. Sugano : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on SO(2,q) , Advanced Studies in Pure Math. vol. 7, Kinokuniya, 1985, 333-362.

[16] T. Sugano: 符号（2，2）のユニタリ群のL関数について，数理解析研究所講究録 583.

[17] T. Sugano : On the L-functions associated with hermitian modular forms of genus 2 (preprint).